ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

KHIẾU THỊ LAN ANH

MỘT SỐ DẠNG CHUẨN TẮC CỦA PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG HỖN HỢP TRONG MẶT PHẲNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

KHIẾU THỊ LAN ANH

MỘT SỐ DẠNG CHUẨN TẮC CỦA PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG HỖN HỢP TRONG MẶT PHẲNG

Chuyên ngành: **Toán giải tích**
Mã số: **60.46.01.02**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: **TS. TRỊNH THỊ DIỆP LINH**

THÁI NGUYÊN - 2015

LỜI CAM ĐOAN

Tôi cam đoan đây là công trình được trình bày theo nhận thức của riêng tôi. Các kết quả nêu trong luận văn là trung thực. Tài liệu tham khảo và nội dung trích dẫn đảm bảo tính trung thực và sự chính xác

Thái Nguyên, tháng 9 năm 2015

Tác giả

Khiếu Thị Lan Anh

LỜI CẢM ƠN

Bản luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của TS. Trịnh Thị Diệp Linh. Nhân dịp này tôi xin cám ơn Cô về sự hướng dẫn hiệu quả cùng những kinh nghiệm trong quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Xin chân thành cảm ơn Phòng Đào tạo, bộ phận Sau Đại học, Ban chủ nhiệm Khoa Toán, các thầy cô giáo Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học và Trường Đại học Sư phạm Hà Nội đã giảng dạy và tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu khoa học.

Xin chân thành cảm ơn Trường THPT Cao Phong, Huyện Cao Phong, Tỉnh Hoà Bình cùng các đồng nghiệp đã tạo điều kiện giúp đỡ tôi về mọi mặt trong quá trình học tập và hoàn thành bản luận văn này.

Bản luận văn chắc chắn sẽ không tránh khỏi những khiếm khuyết vì vậy rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô giáo và các bạn học viên để luận văn này được hoàn chỉnh hơn.

Cuối cùng xin cảm ơn gia đình và bạn bè đã động viên, khích lệ tôi trong thời gian học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Thái Nguyên, tháng 9 năm 2015

Tác giả

Khiếu Thị Lan Anh

Mục lục

Mở đầu

Họ các đường cong tích phân của phương trình đặc trưng đóng vai trò quan trọng trong lý thuyết của các phương trình đạo hàm riêng (xem [5], [7], [13]).

Xét phương trình vi phân cấp 2 trên mặt phẳng

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} = F(x,y,u,u_x,u_y), \tag{1}$$

trong đó x, y là các tọa độ, a, b, c là các hàm số trơn, và F là hàm số nào đó.

Phương trình đặc trưng tương ứng được định nghĩa

$$a(x,y)dy^2 - 2b(x,y)dxdy + c(x,y)dx^2 = 0. \tag{2}$$

Như vậy, vấn đề nghiên cứu các dạng chuẩn địa phương của phương trình đặc trưng dẫn đến sự thay đổi trơn của các tọa độ đã có các nghiên cứu tới thế kỷ XIX. Từ xuất phát ban đầu của bài toán cho tới cuối thế kỷ đã nhận được các dạng chuẩn bao gồm các phương trình Laplace, phương trình sóng, và phương trình Cibrario - Tricomi đã biết.

Các phương trình đặc trưng tương ứng với ba dạng trên là

$$dy^2 + dx^2 = 0, \qquad dy^2 - dx^2 = 0 \quad \text{và} \quad dy^2 - xdx^2 = 0, \tag{3}$$

(xem [4], [6], [7], [15]). Dạng chuẩn đầu tiên và dạng chuẩn thứ 2 được lấy gần một điểm của miền xác định elliptic và hyperbolic của phương trình ban đầu tương ứng với phương trình (2) có nghiệm 0 và hai nghiệm thực $dy : dx$ tại một điểm tương ứng.

Dạng thứ ba là dạng chuẩn Cibrario - Tricomi, lấy vị trí tại một điểm điển hình của loại đường suy biến (hay đường cong biệt thức khác) của phương trình, ở đây biệt thức là bằng 0 nhưng vi phân của nó khác 0, hướng đặc trưng không tiếp xúc với đường tại điểm này. Sự chứng minh dạng này đã được hoàn thành bởi Tricomi F. (xem [15]) nhưng còn có chỗ thiếu sót và sau này đã được chứng minh hoàn chỉnh bởi Cibrario M. (xem [6]). Đây là dạng chìa khóa trong công thức của vấn đề đã được nghiên cứu bởi Tricomi và các sự thay đổi khác nhau của nó.

Danh sách hoàn thành của các dạng chuẩn địa phương của mạng đặc trưng cho phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp 2 tổng quát trong mặt phẳng đã tìm được ở cuối thế kỷ XX, khi các dạng chuẩn trơn tìm gần một điểm của đường suy biến, tại điểm mà hướng đặc trưng là tiếp tuyến tới đường (xem [8], [9], [10], [11]). Nó đã chứng minh rằng, một phương trình đặc trưng gần một điểm của tiếp tuyến này là rút gọn được đến dạng

$$dy^2 + (kx^2 - y)dx^2 = 0, \tag{4}$$

trong đó k là tham số thực, bởi phép nhân trên hàm số không triệt tiêu trơn và sự lựa chọn thích ứng của các tọa độ trơn mới với gốc tại điểm này, nếu các điều kiện tiêu chuẩn được đưa vào. Chính xác hơn, trường hướng đặc trưng có thể nâng lên tới trường giá trị đơn trên mặt phương trình đã xác định trong không gian của các hướng trên mặt phẳng (với các tọa độ địa phương x, y, p, trong đó $p = dx : dy$) bởi phương trình (2). Tại một điểm của bề mặt này giá trị của trường hướng nâng lên được là giao của mặt phẳng tiếp tuyến tới bề mặt và mặt phẳng tiếp xúc xác định được 0 của dạng $dy - pdx$ nếu các mặt phẳng này là khác nhau.

Nội dung chủ yếu của luận văn trình bày lại các kết quả trong bài báo [3], [2]. Ngoài phần mở đầu, kết luận, và tài liệu tham khảo luận văn được chia thành hai chương

Chương 1. Kiến thức chuẩn bị

Trong chương 1 đưa ra một số khái niệm, ví dụ minh họa và tính chất cơ bản liên quan đến vấn đề nghiên cứu trong chương 2.

Chương 2. Một số dạng chuẩn tắc của phương trình đạo hàm riêng hỗn hợp trong mặt phẳng

Trong chương này đã trình bày định lý rút gọn và sử dụng phương pháp chứng minh của định lý rút gọn để nhận được các kết quả về dạng chuẩn tắc của phương trình đạo hàm riêng hỗn hợp trong mặt phẳng.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1. Một số khái niệm

Định nghĩa 1.1. Phương trình vi phân ẩn cấp 1 trên mặt phẳng $\mathbb{R}^2_{x,y}$ của hàm số trơn trong không gian của các hướng được gọi là *mặt của phương trình.*

Phương trình điển hình hay *phương trình tổng quát* là phương trình từ tập mở trù mật hầu khắp nơi nào đó của tập hợp trong không gian tôpô được lựa chọn.

Định nghĩa 1.2. Giới hạn trên mặt của phép chiếu tiêu chuẩn dọc theo trục của các hướng, nghĩa là ánh xạ của mặt này trên mặt phẳng pha (thường gọi là *hướng*) được gọi là *gấp* của phương trình ẩn.

Định nghĩa 1.3. Một *ánh xạ gấp* của phương trình ẩn là *phép chiếu* của phương trình mặt trên mặt phẳng với các biến x, y dọc theo trục p. Một điểm trên mặt gọi là *chính quy* nếu nó không là điểm tới hạn gấp của phương trình.

Định nghĩa 1.4. *Đường cong tích phân* của phương trình ẩn là đường cong tích phân của trường các hướng trên bề mặt của phương trình.

Định nghĩa 1.5. Đối với phương trình đặc trưng (2), ánh xạ đi đến điểm của bề mặt phương trình gấp với ảnh tương ứng được gọi là *phép đối hợp gấp* của phương trình.

Định nghĩa 1.6. Họ vi phân của trường véctơ v (hoặc của trường hướng), phôi của trường véc tơ (hoặc của trường hướng) với tham số $\varepsilon \in \mathbb{R}^m, m \geq 1$

là C_v^r-*tương đương* nếu nó dẫn đến trong các phôi khác của họ, phép C_v^r-vi đồng phôi với tham số bảo toàn sự phân lớp tự nhiên trên không gian tham số đi tới các đường cong pha (hoặc các đường cong tương ứng) của trường $(v, \dot{\varepsilon} = 0)$ (tương ứng $(v, 0)$) trong chính nó.

Định nghĩa 1.7. C_v^r-tương đương của các phôi của họ được gọi là *mạnh* nếu nó bảo toàn tham số.

1.2. Phôi và điểm kì dị

Định nghĩa 1.8. Hai đối tượng có tính chất giống nhau (các tập hợp, các trường véctơ, các họ của đường cong, phép ánh xạ,...) được gọi là *tương đương tại một điểm* nếu chúng trùng nhau trong lân cận của điểm đó.

Lớp tương đương của một đối tượng tại một điểm được gọi là *phôi* của nó tại điểm đó.

Ví dụ 1.1. Các hàm số của hàm một biến $g_1(x) = x$ và $g_2(x) = \dfrac{x+|x|}{2}$ có một phôi chung tại mỗi điểm của nửa trục x dương và các phôi khác tại mỗi điểm khác.

Định nghĩa 1.9. Hai sự biến dạng (của phôi) của phương trình ẩn gọi là *tương đương trơn* nếu hai sự biến dạng tạo thành một trong phép vi đồng phôi trơn khác (tương ứng phôi của phép vi đồng phôi trơn).

Định nghĩa 1.10. Sự biến dạng phôi của phương trình vi phân ẩn được gọi là *quy nạp* từ phôi khác nếu phôi thứ nhất nhận được là ánh xạ trơn của phôi thứ hai.

Định nghĩa 1.11. Với $r \geq 0$ hai phôi của các đối tượng có cùng tính chất (chẳng hạn các ánh xạ, các hàm số, các đường cong,..) được gọi là C^r-*tương đương* dọc theo C^1-trường véctơ (hoặc trường của các hướng) v ($= C_v^r-$tương đương) nếu chúng đưa đến một phôi khác của phép C^r-vi đồng phôi đưa đến các đường cong pha (tương ứng các đường cong tích phân) của trường v trong chính nó.

Ví dụ 1.2. Trên mặt phẳng $\mathbb{R}^2_{x,y}$, cho trường véctơ $v = (x, \beta y)$ với $\beta \neq 1$ của phôi trong O và của hai đường thẳng đi qua O trong tọa độ ban